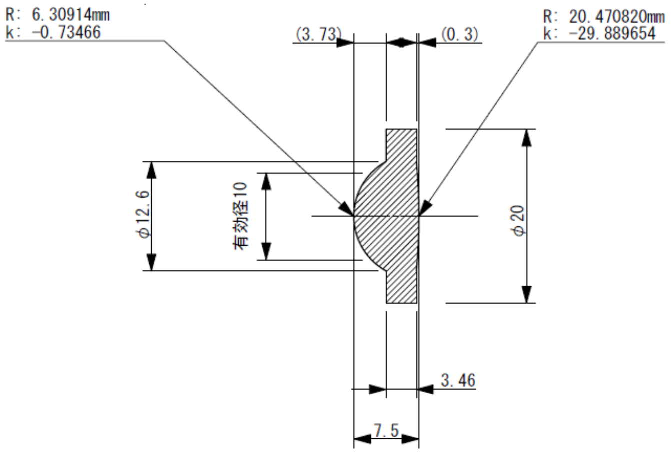
# 形状誤差や屈折率分布を扱う光線追跡法のための技術

2023/07/31

会津大学　西舘　陽平

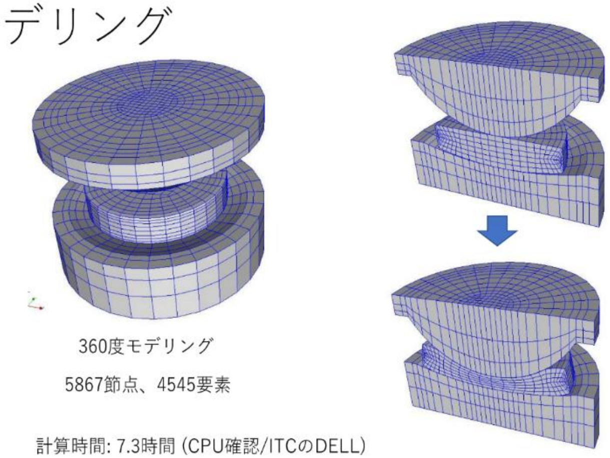
# シミュレーション結果から光線追跡

## 1. 設計




## 2. 解析メッシュ作成

モデリング

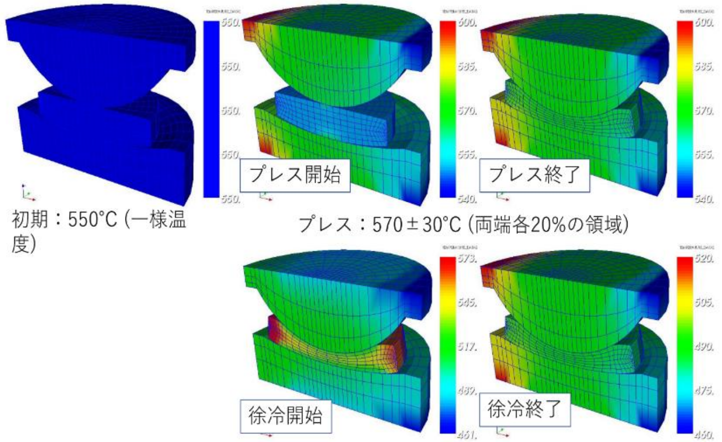


360度モデリング

5867節点、4545要素

計算時間: 7.3時間 (CPU確認/ITCのDELL)

## 3. 成型シミュレーション




初期：550°C (一様温度)

プレス：570±30°C (両端各20%の領域)

徐冷：490±30°C (両端各20%の領域)

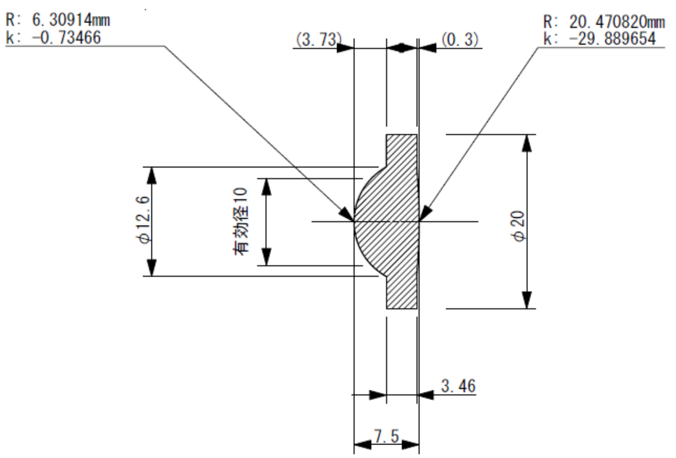
※ V-Glace資料より （インテグレーションテクノロジー）


できあがるレンズ性能の事前評価

実際に試作する回数を減らしつつ、設計や成形条件の見直しができる

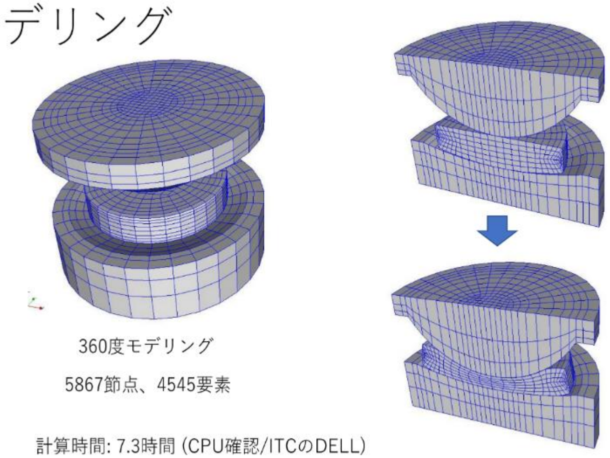
# シミュレーション結果から光線追跡

## 1. 設計




## 2. 解析メッシュ作成

モデリング

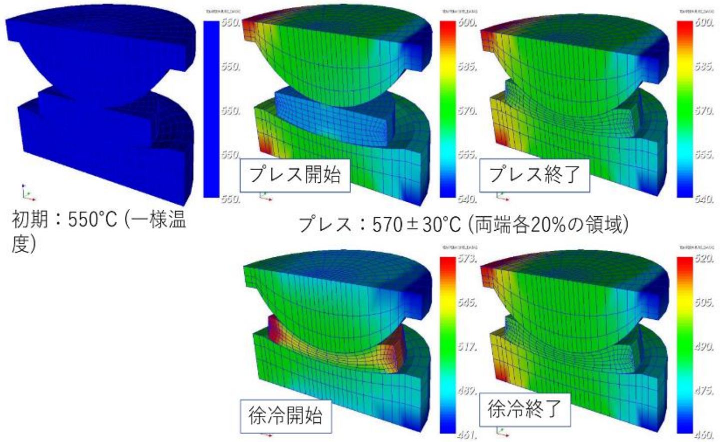


360度モデリング

5867節点、4545要素

計算時間: 7.3時間 (CPU確認/ITCのDELL)

## 3. 成型シミュレーション

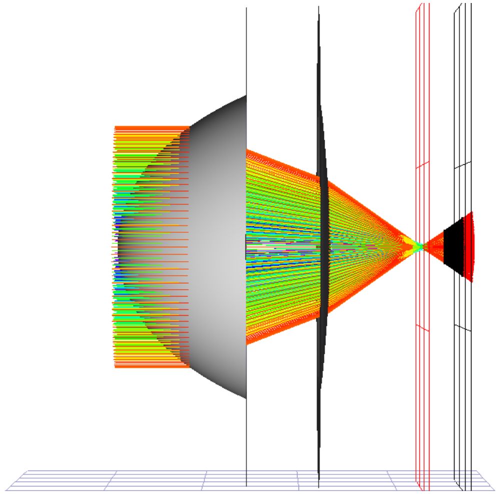


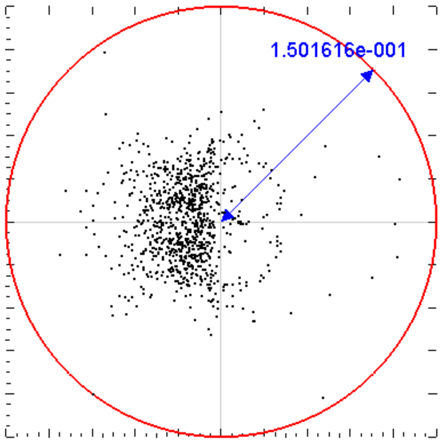

初期：550°C (一様温度)

プレス：570±30°C (両端各20%の領域)

徐冷：490±30°C (両端各20%の領域)

## 4. 光線追跡






実際の性能を評価するには光を通したい

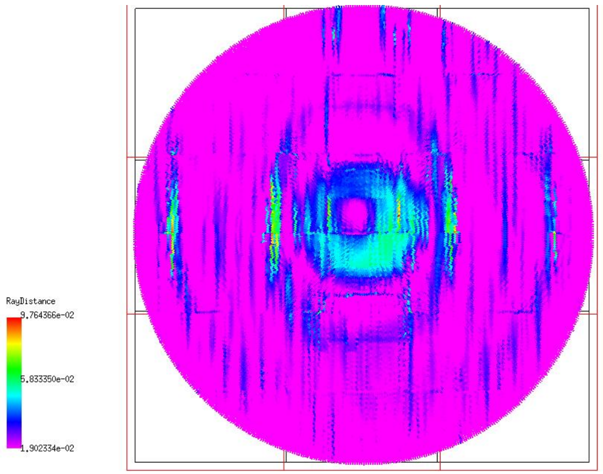
- 変形後の表面形状を再現する面表現
- 屈折率分布を考慮

より現実に近いトライアル&エラーができる

# 実測点群から光線追跡

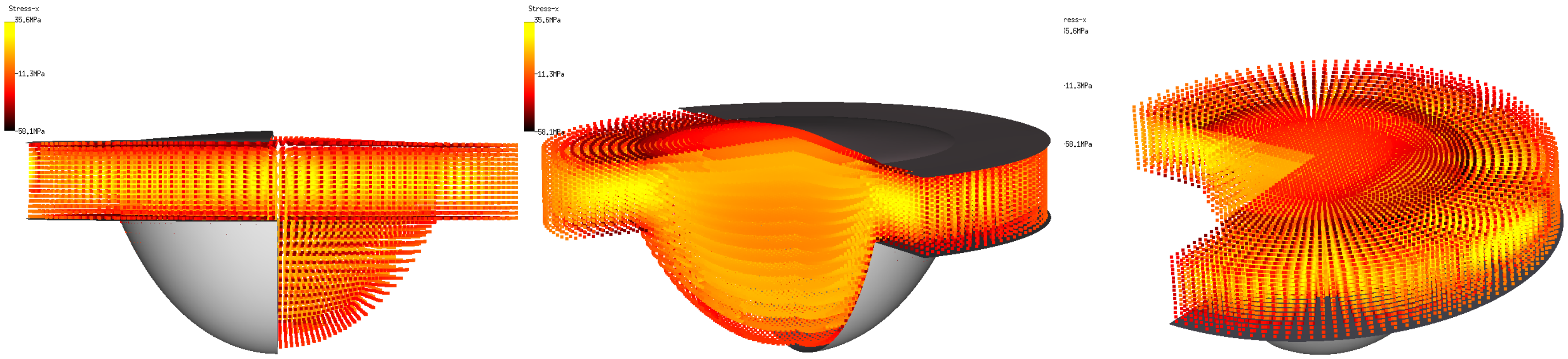
1. 設計形状からの変形（形状誤差）を扱えるような面表現

   金型形状誤差
   熱収縮
   など

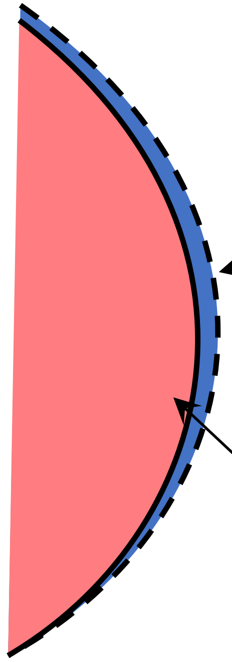



2. 屈折率分布を扱えるような面表現

   熱収縮による内部密度分布



# 表面形状の再現



設計上の面
例えば非球面多項式

$$z(r)=\frac{cr^2}{1+\sqrt{1-(k+1)c^2r^2}}+\sum_{i=1}^{n}a_i r^i$$

できあがるレンズの面

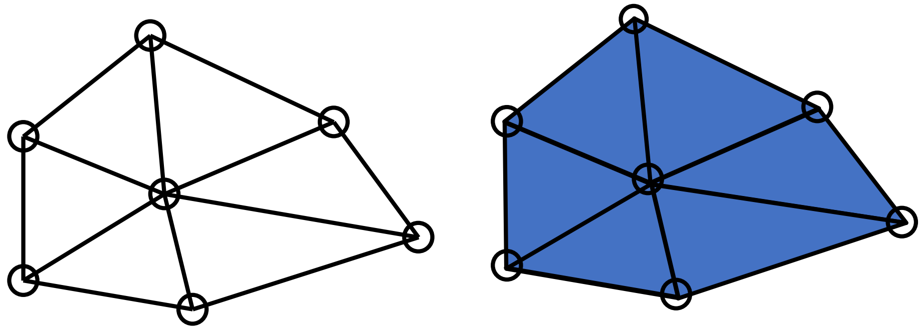
接触ツールなどで面位置を取る → 計測点群

シミュレーションで変形を計算
V-Glace → 要素点群

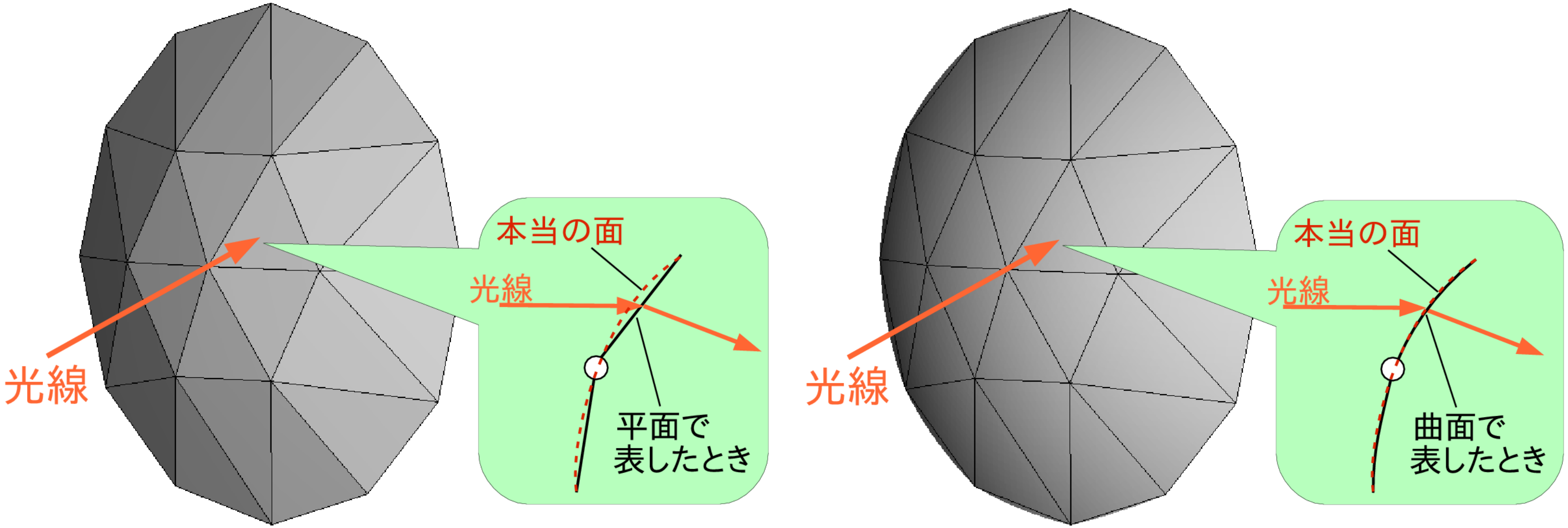
点群をどうやって
面にするか？

# 表面形状の再現

1. サンプル点を繋ぐ



2. 区分的な曲面で埋める



# レンズ面の曲面パッチによる表現方法

- ➢ Bezierパッチ
- ➢ Splineパッチ　など

隣接パッチ間の接続 →　パラメータの調整が必要

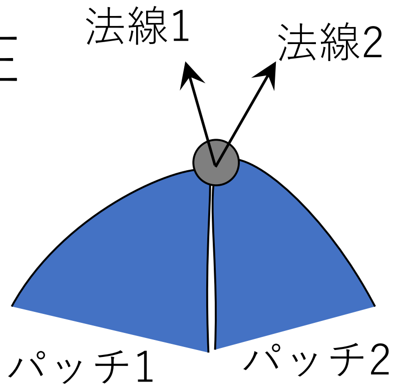
線とパッチの交差　→ 高次式を再帰的解法で解くかパッチ細分化

- ➢ Nagataパッチ　　T. Nagata, Comput.Aided Geom.Des. 22（2005)

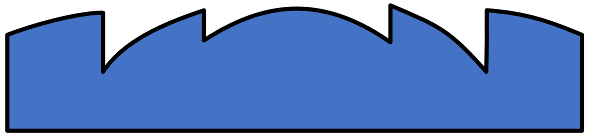
隣接パッチ間の接続 →　$C^0$接続

線とパッチの交差　→　閉式解が存在

接平面不連続



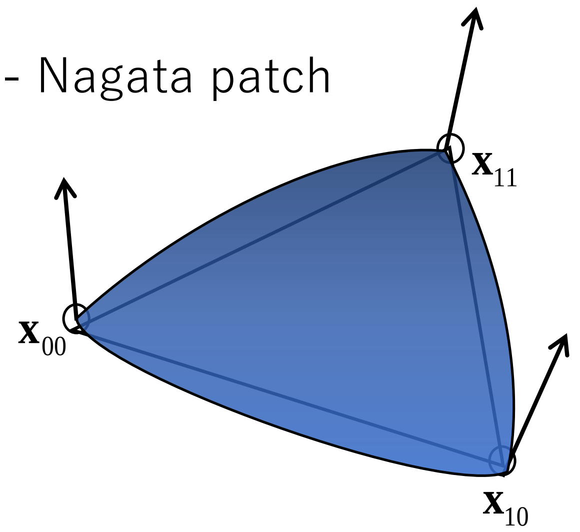

例：フレネルレンズ



マイクロレンズアレイ等

# Nagataパッチの特徴

- Nagata patch




- 隣接要素の情報を必要としない（局所的）
- 頂点座標とその位置での法線ベクトルのみから決まる(フリーパラメータが無い)
- 不連続面が比較的簡単に扱える
- 既存のコードに簡単に組み込める
- 線との交差判定に閉式解が存在する

Nagata patch曲率パラメータc

$$c = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{d}, \mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1) = \begin{cases} \dfrac{[\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1]}{1-c^2} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{d} \\ -\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{d} \end{Bmatrix} & (c \neq \pm 1) \\ 0 & (c = \pm 1) \end{cases}$$

Nagata patch補間式

$$\mathbf{x}(\eta, \zeta) = \mathbf{c}_{00} + \mathbf{c}_{10}\eta + \mathbf{c}_{01}\zeta + \mathbf{c}_{11}\eta\zeta + \mathbf{c}_{20}\eta^2 + \mathbf{c}_{02}\zeta^2$$

$$0 \le \zeta \le \eta \le 1$$

Nagata patch係数 (ベクトル)

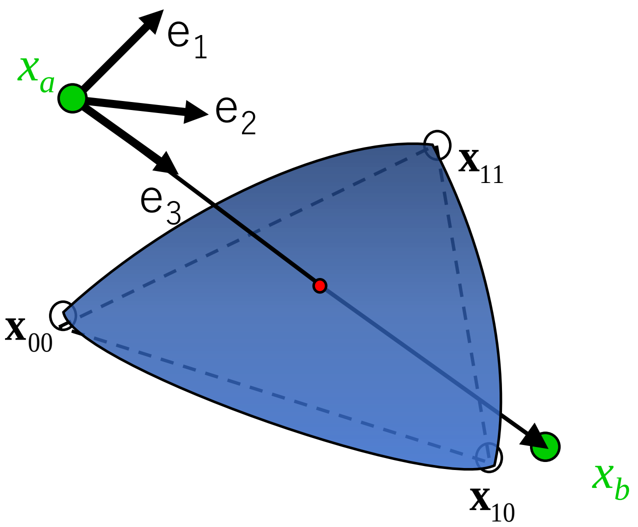
$$\mathbf{c}_{00} = \mathbf{x}_{00}$$
$$\mathbf{c}_{10} = \mathbf{x}_{10} - \mathbf{x}_{00}$$
$$\mathbf{c}_{01} = \mathbf{x}_{11} - \mathbf{x}_{10} + \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_3$$
$$\mathbf{c}_{11} = \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$$
$$\mathbf{c}_{20} = \mathbf{c}_1$$
$$\mathbf{c}_{02} = \mathbf{c}_2$$

# 光線と長田パッチの交点

## 線の式

$$\mathbf{x}(\lambda)=\mathbf{x}_a+\lambda(\mathbf{x}_b-\mathbf{x}_a)$$

λ : 線パラメータ　$0\le\lambda\le1$




## パッチの式

$$\mathbf{x}(\eta,\zeta)=\mathbf{c}_{00}+\mathbf{c}_{10}\eta+\mathbf{c}_{01}\zeta+\mathbf{c}_{11}\eta\zeta+\mathbf{c}_{20}\eta^2+\mathbf{c}_{02}\zeta^2$$

η, ζ : 長田パッチローカル座標　$0\le\zeta\le\eta\le1$

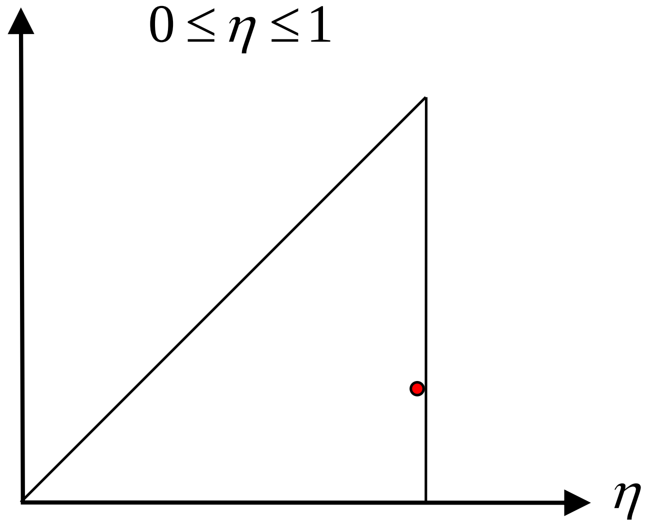
$\eta$ に関する4次式　　$M\eta^4+N\eta^3+O\eta^2+P\eta+Q=0$

# 四次式の係数例

$$\eta^4 + \frac{N}{M}\eta^3 + \frac{O}{M}\eta^2 + \frac{P}{M}\eta + \frac{Q}{M} = 0$$

## 実際にあった係数例

$M = 5.192888526898500391 \times 10^{-15}$
$N = -4.486263940756543575 \times 10^{-10}$
$O = 7.716859489056386641 \times 10^{-6}$
$P = -1.543408488167771092 \times 10^{-5}$
$Q = 7.717672070788253452 \times 10^{-6}$




$\eta_1$ : $6.2687708 \times 10^4$
$\eta_2$ : $2.3702748 \times 10^4$
$\eta_3$ : 1.000110929886432
$\eta_4$ : 1.000110929890070

本当の解 $\eta_3$ : 0.99959698
$\eta_4$ : 1.00062487

- 絶対値の小さな解の精度がかなり落ちている

# 交差判定の式

- 交差判定の式 $M\eta^4 + N\eta^3 + O\eta^2 + P\eta + Q = 0$

Nagata patch補間式

$$\mathbf{x}(\eta,\zeta) = \mathbf{c}_{00} + \mathbf{c}_{10}\eta + \mathbf{c}_{01}\zeta + \mathbf{c}_{11}\eta\zeta + \mathbf{c}_{20}\eta^2 + \mathbf{c}_{02}\zeta^2$$

| | |
|---|---|
| 係数$\alpha$の意味: | $\alpha_{\eta次数\ \zeta次数}$ |
| 係数$\beta$の意味: | $\beta_{\eta次数\ \zeta次数}$ |

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{c}_{ij} - \boldsymbol{x}_a) & i = j = 0 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{c}_{ij} & otherwise \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{c}_{ij} - \boldsymbol{x}_a) & i = j = 0 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{c}_{ij} & otherwise \end{cases}$$

$$\boxed{M = \alpha_{11}\mu_1 + \alpha_{20}^2\beta_{02}}$$

$$\boxed{N = \alpha_{01}\mu_1 + \alpha_{11}\mu_2 + 2\alpha_{10}\alpha_{20}\beta_{02}}$$

$$\boxed{O = \alpha_{01}\mu_2 + \alpha_{11}\mu_3 + \beta_{02}\left(\alpha_{10}^2 + 2\alpha_{00}\alpha_{20}\right)}$$

$$\boxed{P = \alpha_{01}\mu_3 + \alpha_{11}\mu_4 + 2\alpha_{00}\alpha_{10}\beta_{02}}$$

$$\boxed{Q = \alpha_{01}\mu_4 + \alpha_{00}^2\beta_{02}}$$

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{11} \\
\mu_2 &= \alpha_{11}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{11} + \alpha_{01}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{01} \\
\mu_3 &= \alpha_{01}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{01} + \alpha_{11}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{11} \\
\mu_4 &= \alpha_{01}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{01}
\end{aligned}$$

# 交差判定の式

- 交差判定の式　$M\eta^4 + N\eta^3 + O\eta^2 + P\eta + Q = 0$

Nagata patch補間式

$$\mathbf{x}(\eta,\zeta) = \mathbf{c}_{00} + \mathbf{c}_{10}\eta + \mathbf{c}_{01}\zeta + \mathbf{c}_{11}\eta\zeta + \mathbf{c}_{20}\eta^2 + \mathbf{c}_{02}\zeta^2$$

| | |
|---|---|
| 係数$\alpha$の意味: | $\alpha_{\eta次数\ \zeta次数}$ |
| 係数$\beta$の意味: | $\beta_{\eta次数\ \zeta次数}$ |

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{c}_{ij} - \boldsymbol{x}_a) & i = j = 0 \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{c}_{ij} & otherwise \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{c}_{ij} - \boldsymbol{x}_a) & i = j = 0 \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{c}_{ij} & otherwise \end{cases}$$

$$\boxed{M = \alpha_{11}\mu_1 + \alpha_{20}^2\beta_{02}}$$

(双1次$^2$ x 2次) + 2次$^3$

$$\boxed{N = \alpha_{01}\mu_1 + \alpha_{11}\mu_2 + 2\alpha_{10}\alpha_{20}\beta_{02}}$$

(1次 x 双1次 x 2次) + (双1次$^2$  x 1次) + (1次 x 2次$^2$)

$$\boxed{O = \alpha_{01}\mu_2 + \alpha_{11}\mu_3 + \beta_{02}\left(\alpha_{10}^2 + 2\alpha_{00}\alpha_{20}\right)}$$

(1次$^2$ x 双1次) + (双1次 x 1次$^2$) + 2次x(1次$^2$ + 0次2次)

$$\boxed{P = \alpha_{01}\mu_3 + \alpha_{11}\mu_4 + 2\alpha_{00}\alpha_{10}\beta_{02}}$$

(1次$^3$) + (双1次 x 1次 x 0次) + 0次 x1次 x2次

$$\boxed{Q = \alpha_{01}\mu_4 + \alpha_{00}^2\beta_{02}}$$

(1次$^2$ x 0次) + (0次$^2$ x2次)

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_{11}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{11} \\ \mu_2 &= \alpha_{11}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{11} + \alpha_{01}\beta_{20} - \alpha_{20}\beta_{01} \\ \mu_3 &= \alpha_{01}\beta_{10} - \alpha_{10}\beta_{01} + \alpha_{11}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{11} \\ \mu_4 &= \alpha_{01}\beta_{00} - \alpha_{00}\beta_{01} \end{aligned}$$

パッチの2次や双1次の係数は
1次や0次の係数より小さい

## 長田パッチにおける係数の絶対値傾向

$$M << N << O, P, Q$$

# 四次式の解を精度よく

$$M\eta^4 + N\eta^3 + O\eta^2 + P\eta + Q = 0$$

$$\downarrow$$

$$\eta^4 + \frac{N}{M}\eta^3 + \frac{O}{M}\eta^2 + \frac{P}{M}\eta + \frac{Q}{M} = 0$$

$M << N << O,\ P,\ Q$のとき

$\left|\frac{N}{M}\right|$ は大きい

解と係数の関係

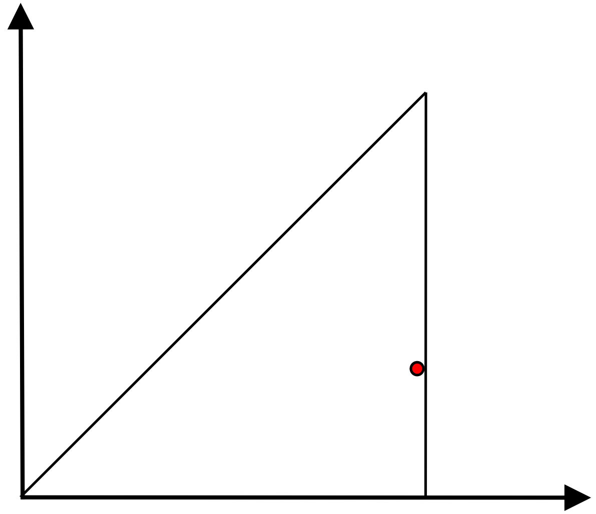
$$\frac{N}{M} = -(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4)$$

から解のうち一つは大きな絶対値を持ち、
それが有効桁数の多くを消費している

# 4次方程式の解

ローカル座標範囲は　$0 \le \zeta \le \eta \le 1$

なので絶対値の大きな解の有効桁数
は落ちても問題ない



$$M\eta^4 + N\eta^3 + O\eta^2 + P\eta + Q = 0$$

の代わりに　$\eta = 1/\tau$　として

$$Q\tau^4 + P\tau^3 + O\tau^2 + N\tau + M = 0$$

を解く

$\eta_1$ : 6.2687708e+04
$\eta_2$ : 2.3702748e+04
$\eta_3$ : 1.000110929886432
$\eta_4$ : 1.000110929890070

$\eta_1$ : 6.2687709e+04
$\eta_2$ : 2.3702748e+04
$\eta_3$ : 1.00062487
$\eta_4$ : 0.99959698

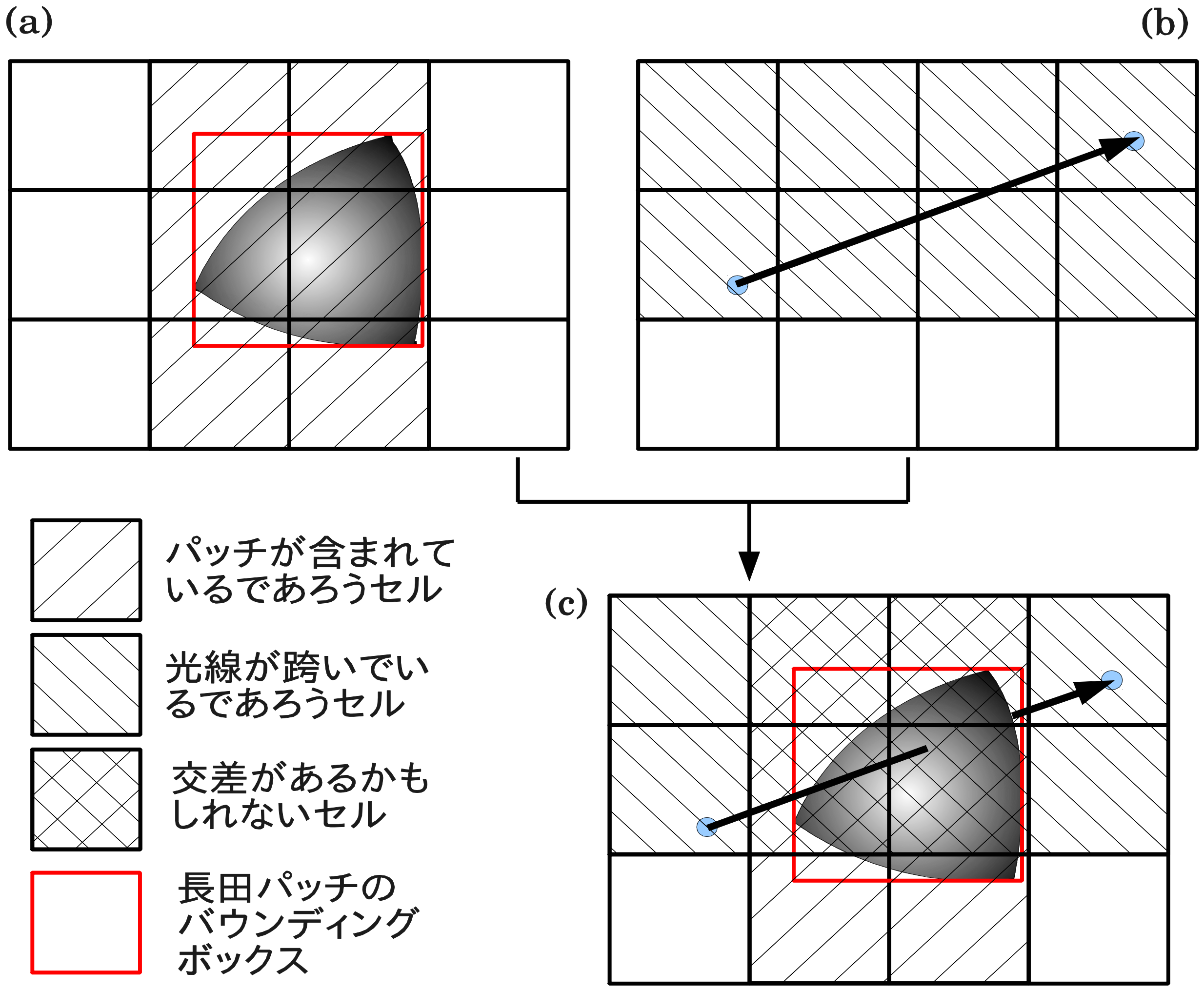
これで

$f(\eta_3), f(\eta_4) < 10^{-21}$
を満たす精度の良い解が得られた

# 交差判定計算を軽く

- 4 次式を 全パッチ-全光線ペア に対して解くのは時間がかかる

2段階のバケットサーチを使う



# 長田パッチのバウンディングボックス

1. 3つの頂点 (3 points, coordinates *x,y,z*):

$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$

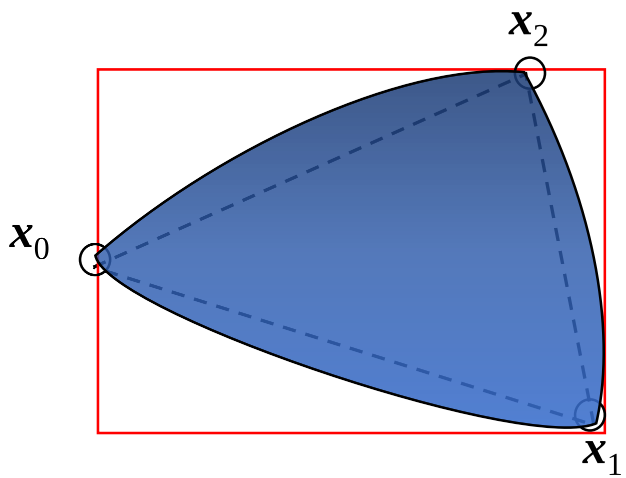
2. 辺上での極値 (3 edges(*j*), coordinates *x,y,z*):

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_j(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \longrightarrow \quad \xi_j^{\boldsymbol{x}} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}_j(\xi_j^x)$$

辺上補間の極値
をとる

ローカル座標
を求める

辺上補間に代入して
グローバル座標を求める




3. 面中での極値 (coordinates *x,y,z*):

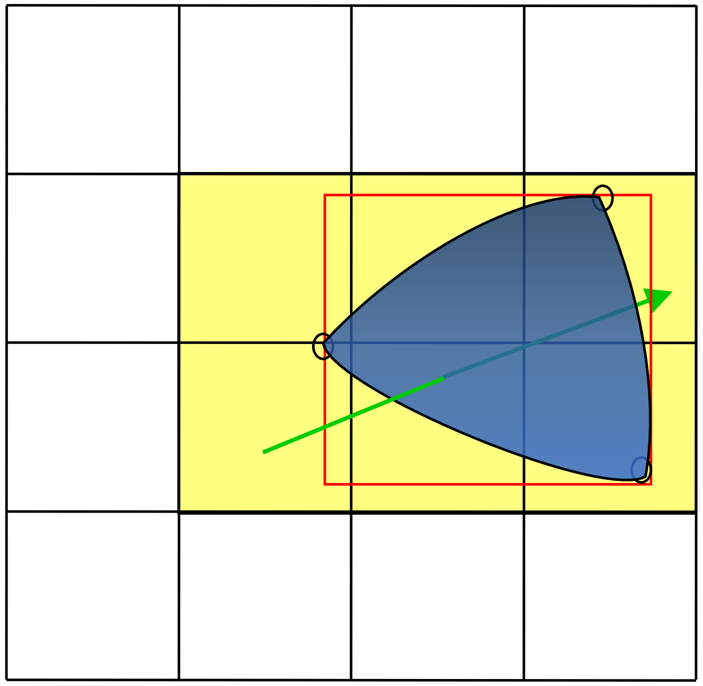
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \boldsymbol{x}(\eta, \zeta)}{\partial \eta} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{x}(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} = 0 \end{array}\right] \longrightarrow \quad \eta^{\boldsymbol{x}}, \zeta^{\boldsymbol{x}} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}(\eta^x, \zeta^x)$$

面上補間の極値
をとる

ローカル座標
を求める

面上補間に代入して
ローカル座標を求める

# 光線との交差判定



処理流れ:

光線 (line) – 空間セル　交差判定

true

光線 (line) – バウンディングボックス　交差判定

true

光線 (line) – パッチ　交差判定

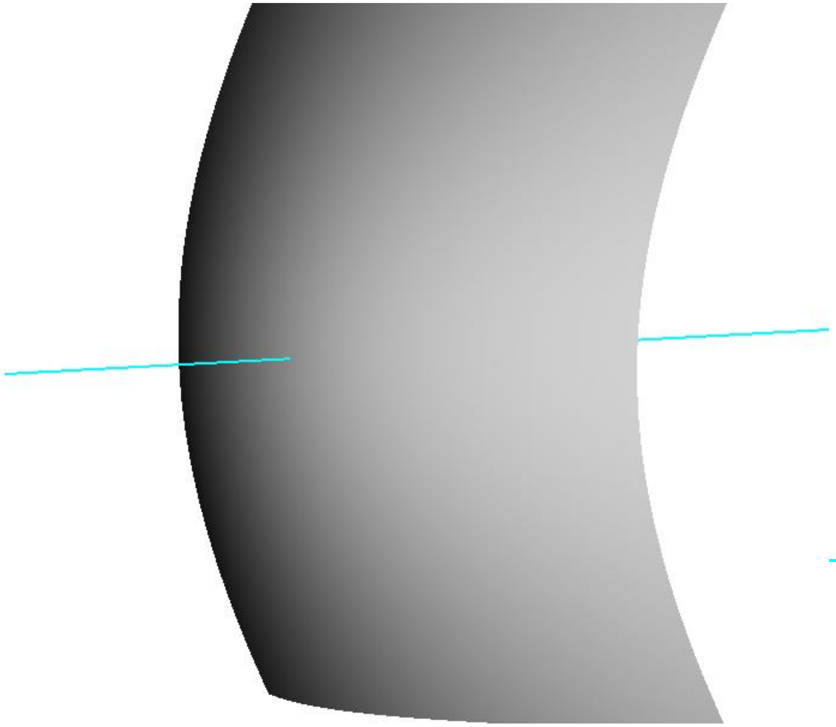
true

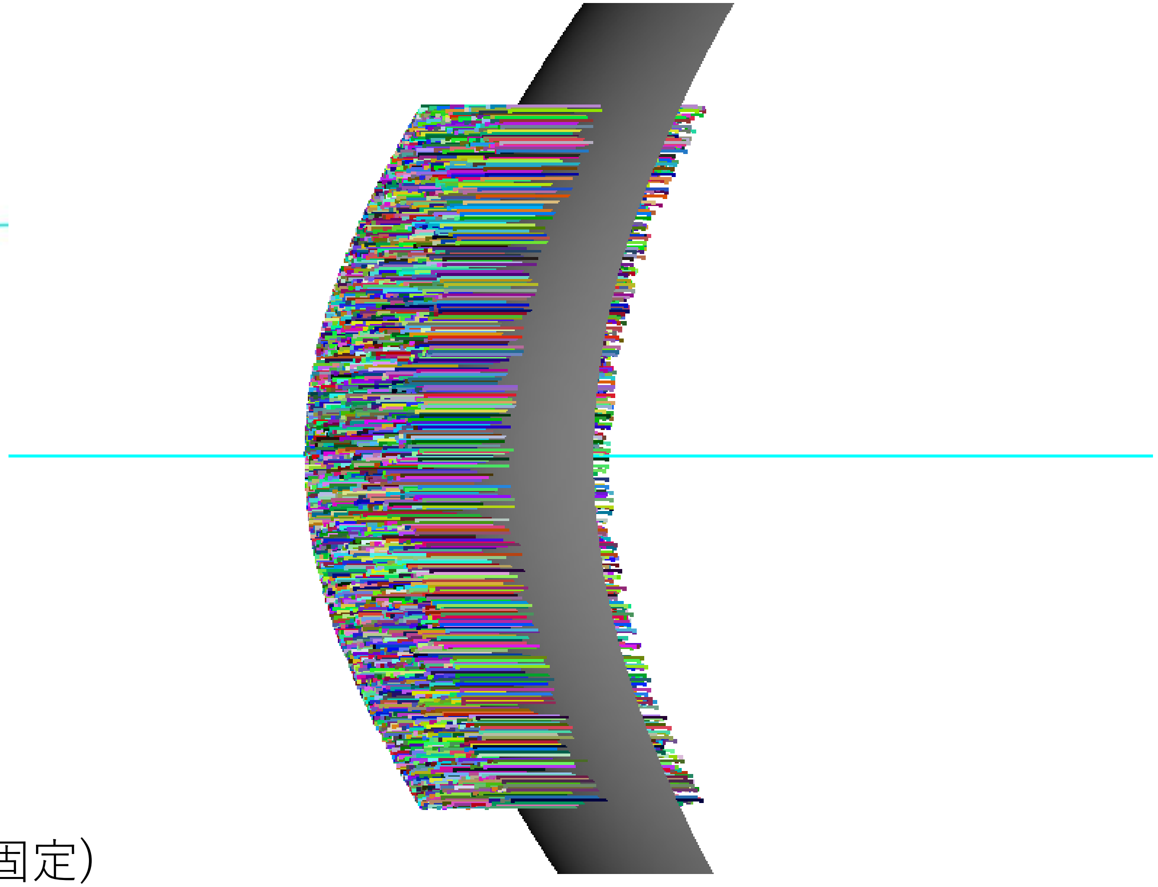
屈折/反射方向の計算

false

光線位置計算

# 交差テスト

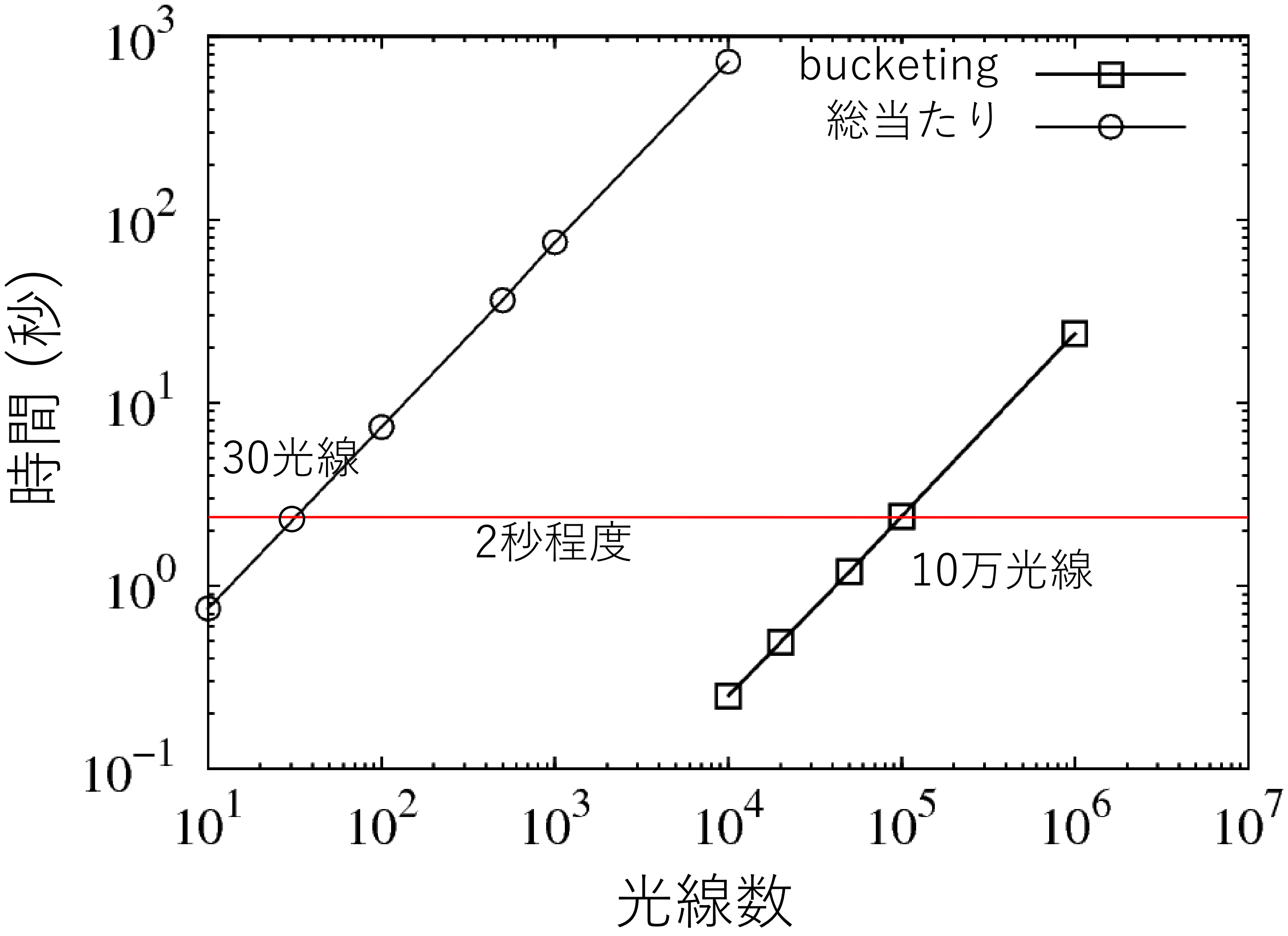




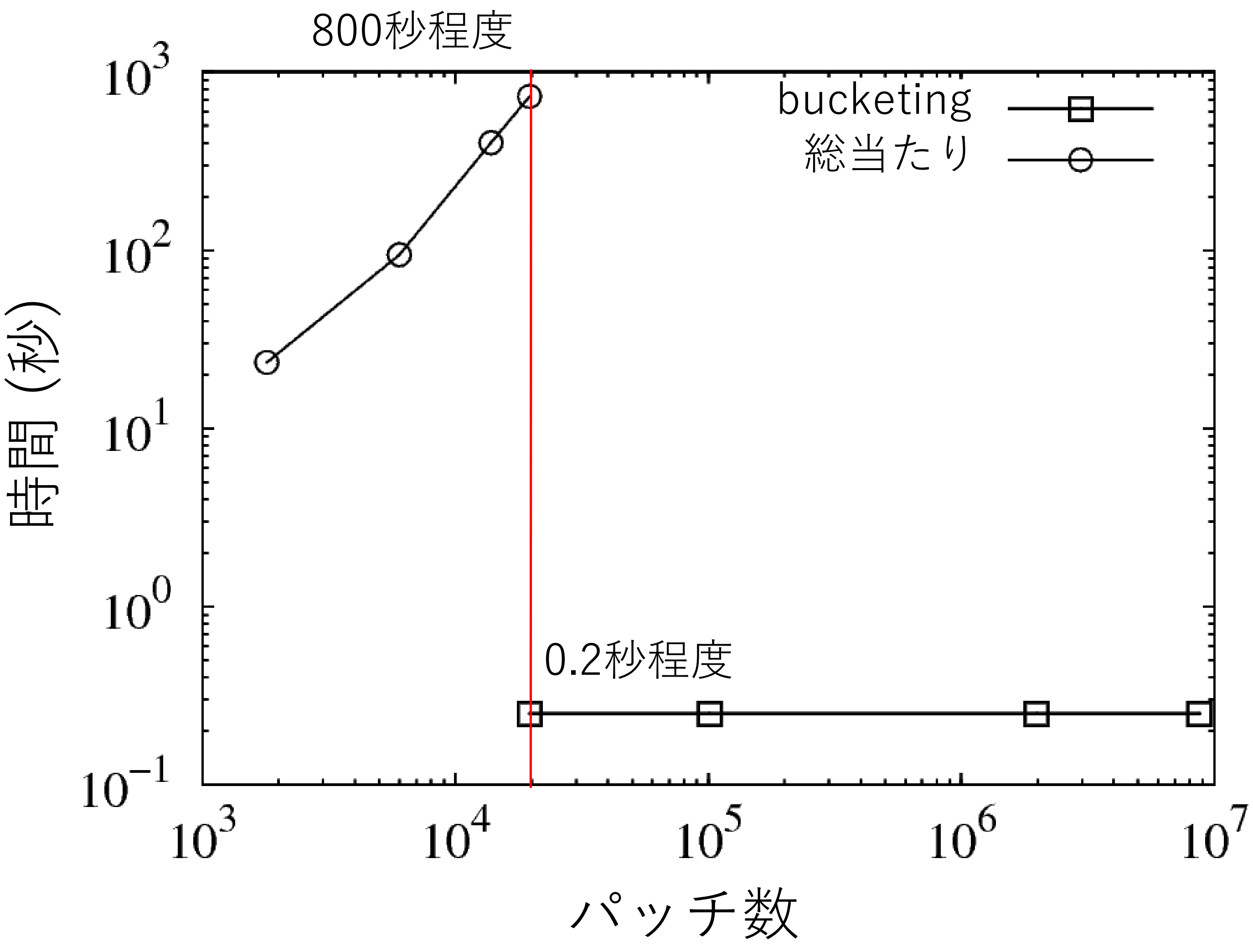
ケース1：光線数変化 (パッチ数2万固定)
ケース2：パッチ数変化 (光線数1万固定)

計算機環境：Xeon 3.06GHz(コア１つ), RAM 12GB

# ケース1：光線数変化 (パッチ数2万固定)

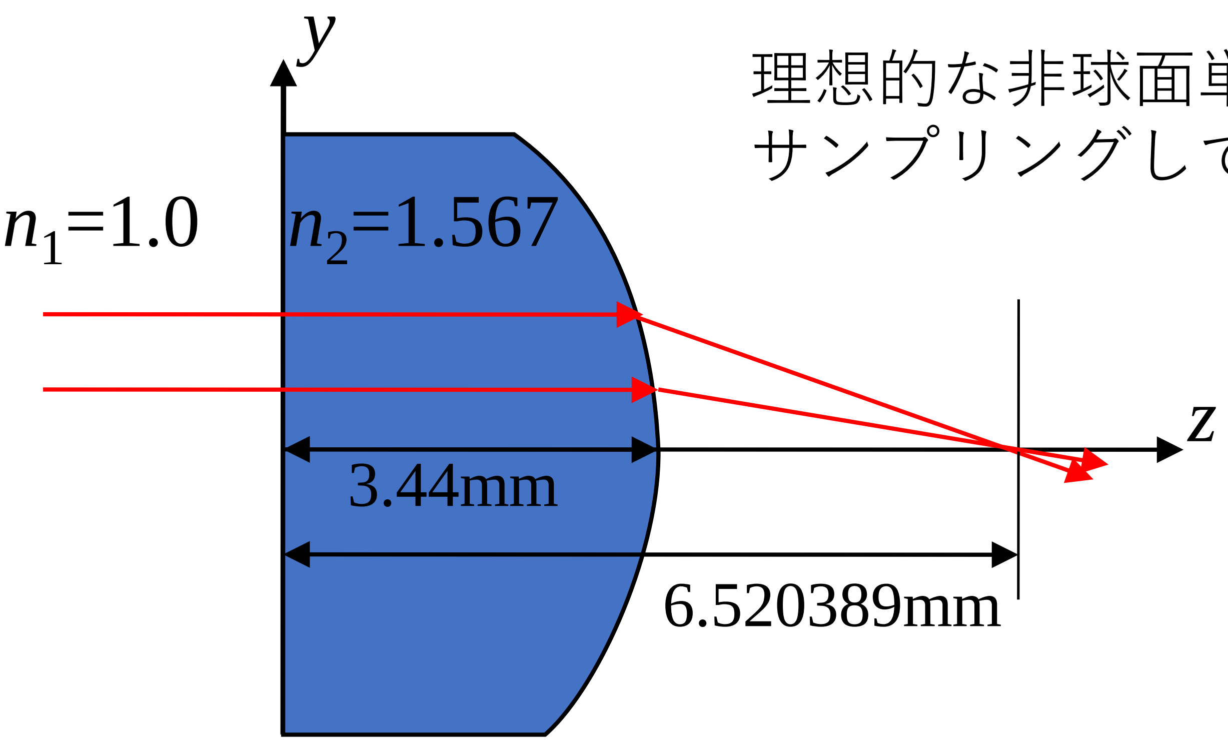


# ケース2：パッチ数変化 (光線数1万固定)



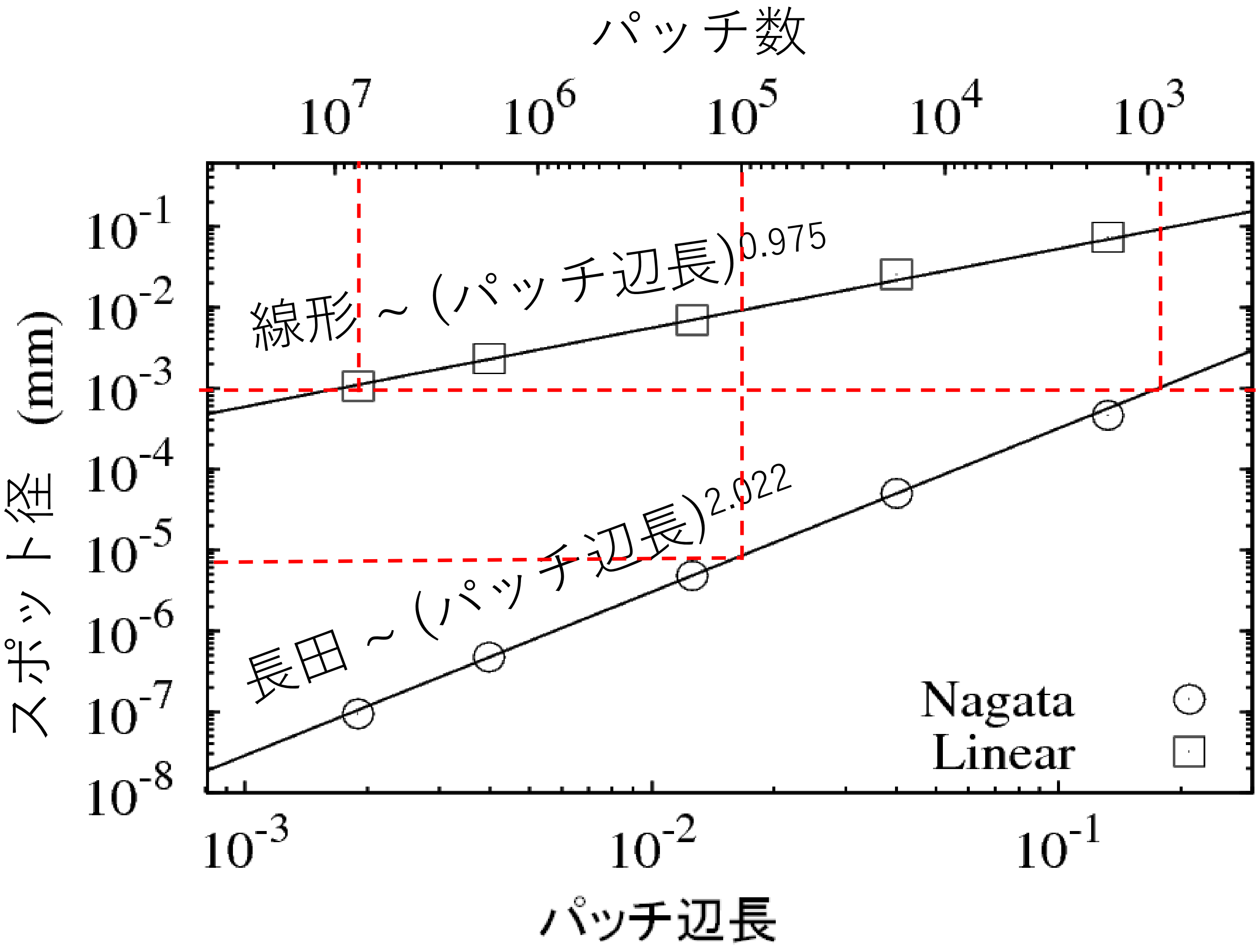
# 光線追跡によるスポット半径

長田パッチだと普通の三角形パッチに比べて
どのくらい精度良くなるのか?




理想的な非球面単レンズの表面を
サンプリングして三角形分割

# スポット半径の収束



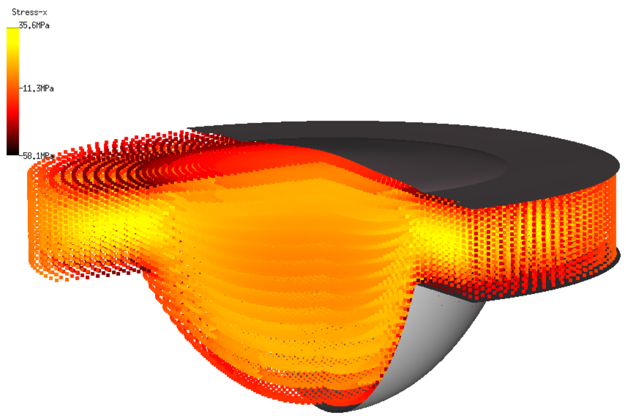

スポット半径$10^{-3}$ ⟶ 線形: 800万パッチ
長田: 900パッチ

# 屈折率分布の表現

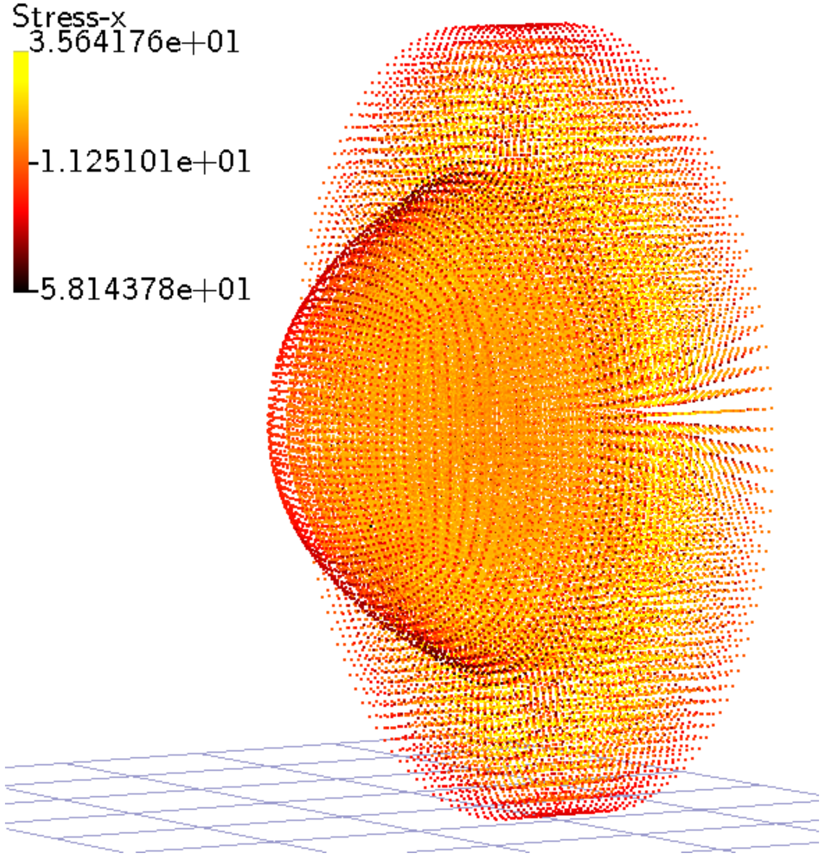
実際のレンズ
から計測

(研究としてX線を使った
幾つかの方法が存在する)

シミュレーション結果




屈折率を持つ点群



# 屈折率分布がある媒質中の光線追跡

- 光線方程式

$$\frac{d}{ds}\left[n(\boldsymbol{r})\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right] = \nabla n(\boldsymbol{r})$$

$\boldsymbol{r}$ :光線位置座標

$n$ :屈折率

$\frac{d}{ds}$ :光線経路に沿った微分

$$n\,dt = ds$$

↓ 変形

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = n\nabla n$$

↓ 分解

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T} \\ \dfrac{d\mathbf{T}}{dt} = n\nabla n \end{cases}$$

$\mathbf{T}$ : 光線方向

# 数値積分におけるステップ制御

- 許容誤差を指定し、その範囲で最大のステップ幅を自動的に選択する数値積分法

- Runge-Kutta-Fehlberg 埋め込み型公式

- 4次精度

$$\mathbf{r}^*_{n+1} = \mathbf{r}_n + \sum_{i=1}^{m} b^*_i \mathbf{k}_i + O(h^5)$$

- 5次精度

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbf{k}_i + O(h^6)$$

- 誤差推定 (5次ー4次)

$$\Delta = \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}^*_{n+1}$$

$$\mathrm{err} = \max(\Delta)$$

- ステップサイズ変更

$$h_{j+1} = S\, h_j \left( \frac{\varepsilon}{\mathrm{err}} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$S = 0.9$ ：安全率,

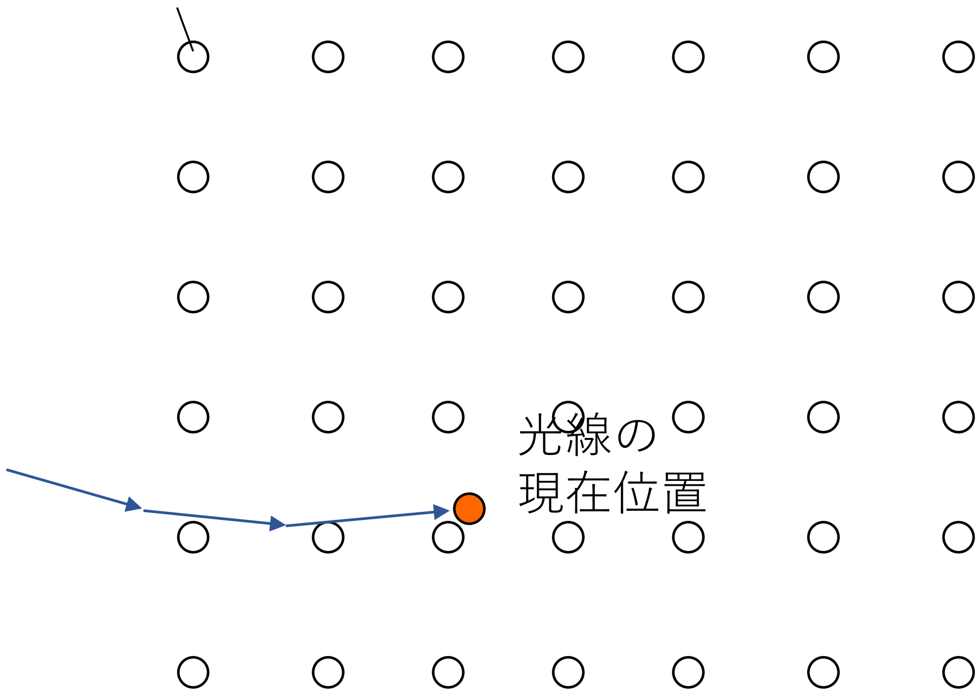
$\varepsilon =$ 機械精度程度 ：許容誤差

# 屈折率分布の再構成

- 光線方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T} \\ \dfrac{d\mathbf{T}}{dt} = n\nabla n \end{cases}$$

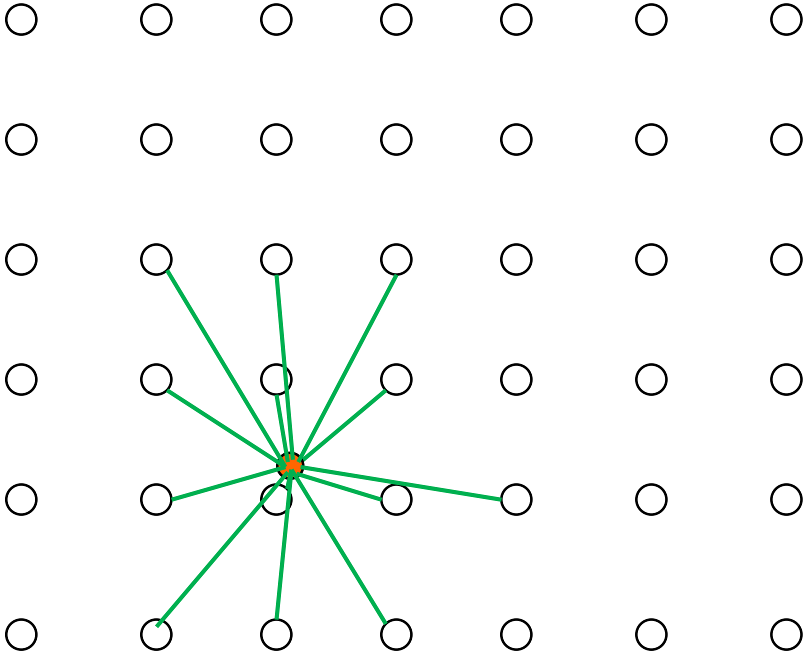
- 屈折率のサンプリング点




- 離散点から $n(\mathbf{x})$を再構築

$$n(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, xyz, x^2, y^2, z^2, x^2y, x^2z, y^2x, y^2z, z^2x, z^2y, x^3, y^3, z^3\}$$

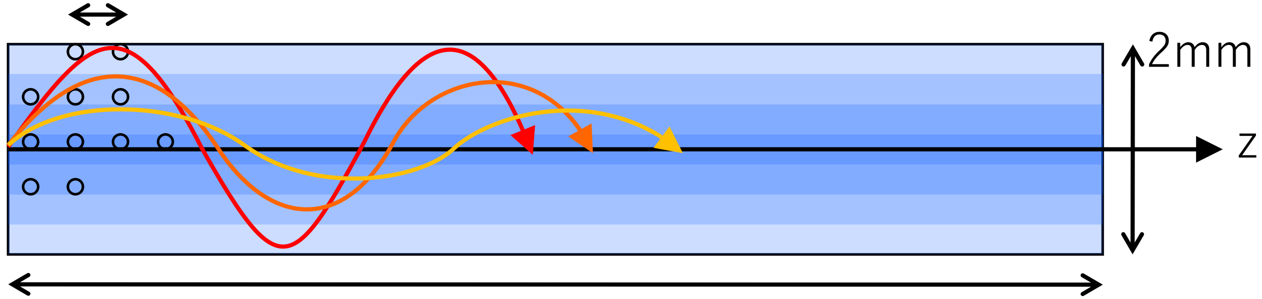


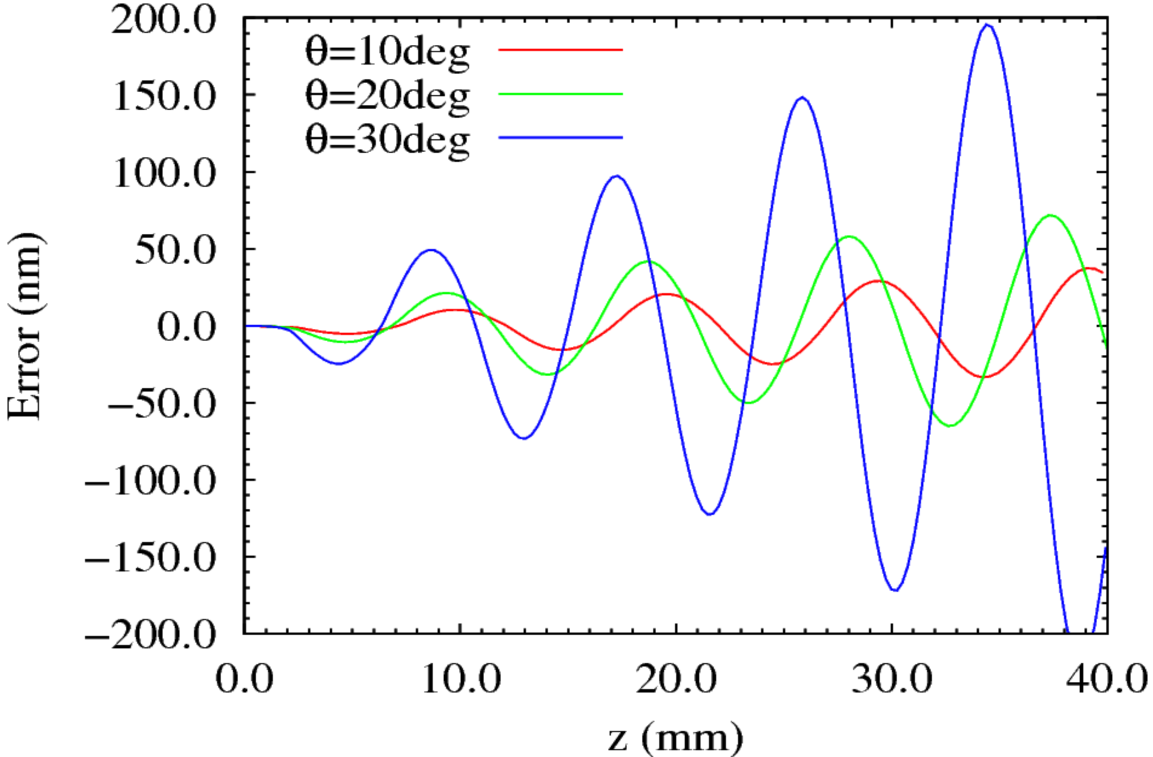
# 計算例１：屈折率分布を持つ光ファイバー

光線初期条件：
$x_0 = 0$
$y_0 = 0$
$\theta_z = 10, 20, 30\text{deg}$

屈折率分布関数

$$n = \sqrt{2.5 - (x^2 + y^2)}$$

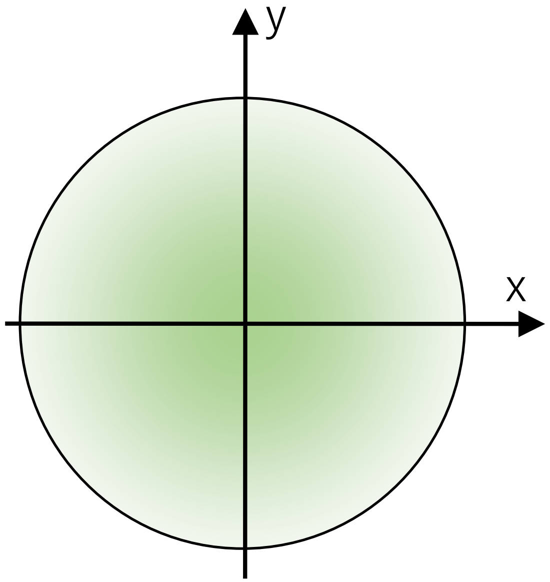


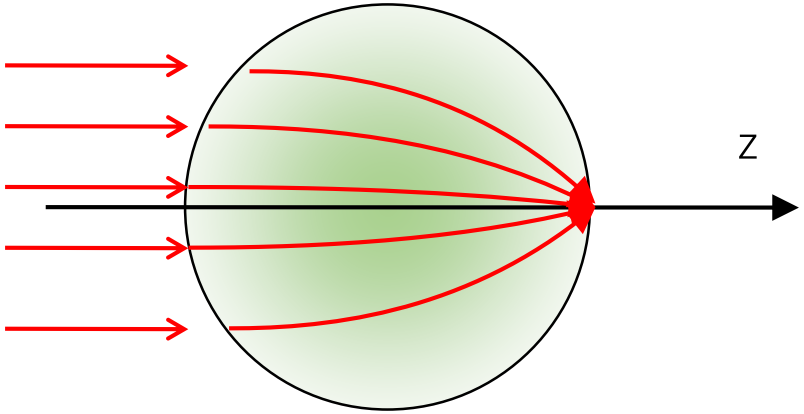




$\theta_z = 10°$　err ～ 40nm
$\theta_z = 20°$　err ～ 80nm
$\theta_z = 30°$　err ～ 210nm

# 計算例２：Luneburgレンズ

- Luneburgレンズとは

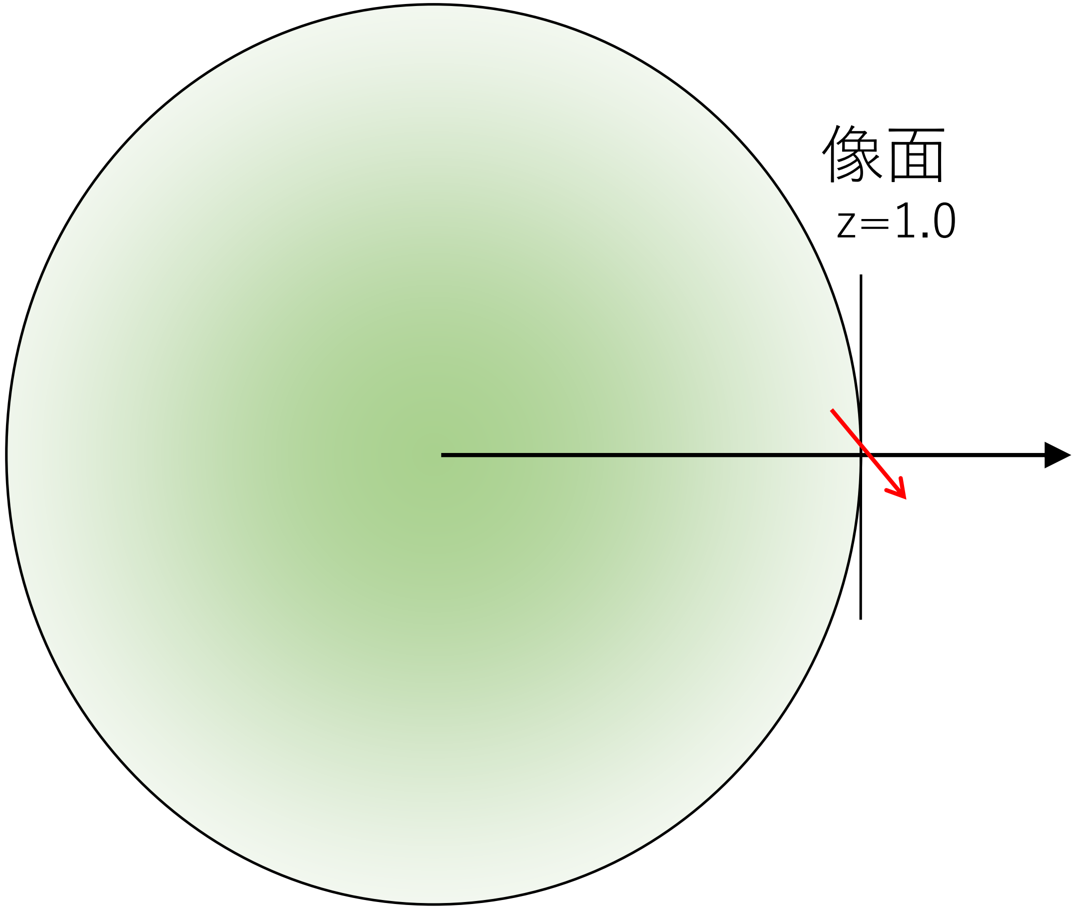


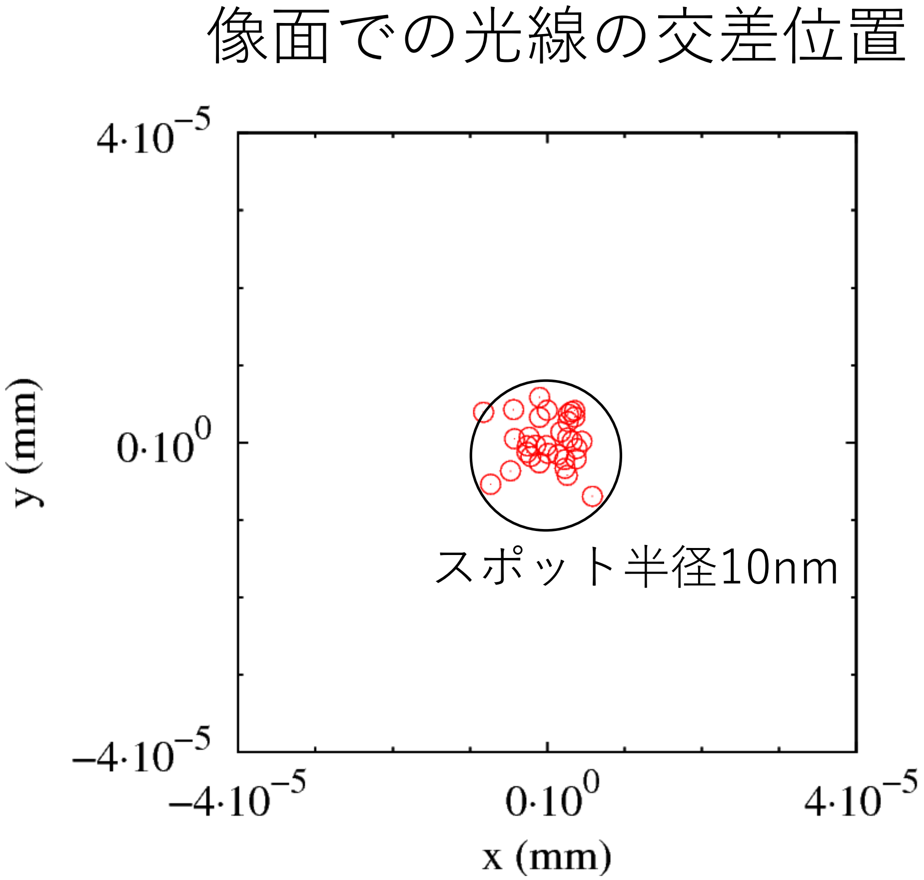




$$n = \sqrt{2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

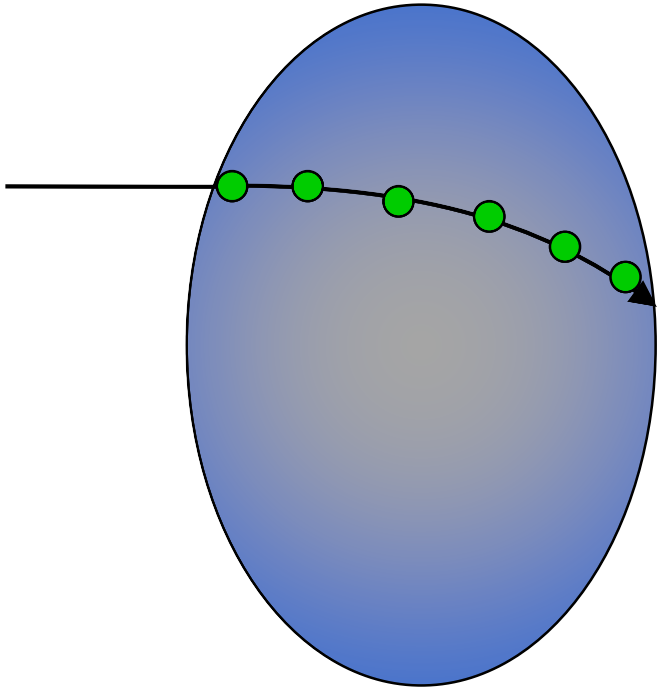
入射平行光線を内部屈折によって
一点に収束させるようなレンズ

# 計算例２：Luneburgレンズ

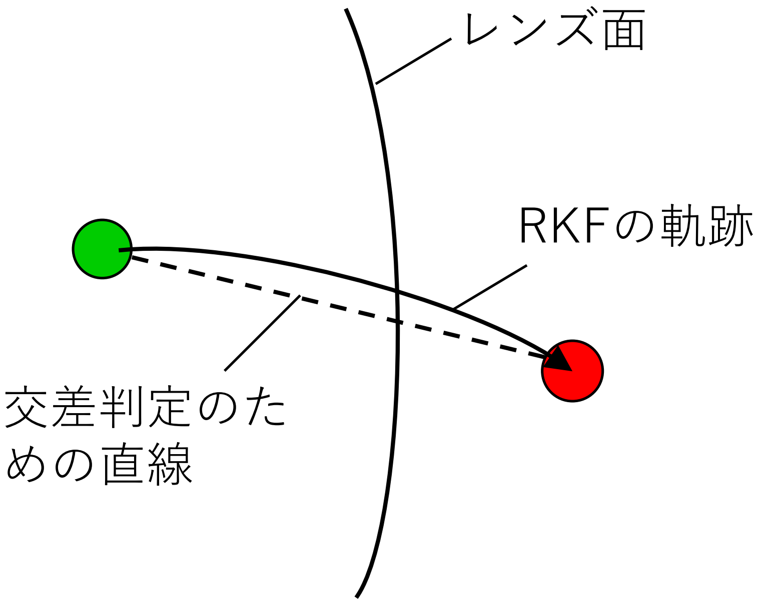


# GRIN媒質出口



光線がGRIN媒質に入射して,出口に到達したとき




直線の場合だけ、パッチとの交差判定式が使える

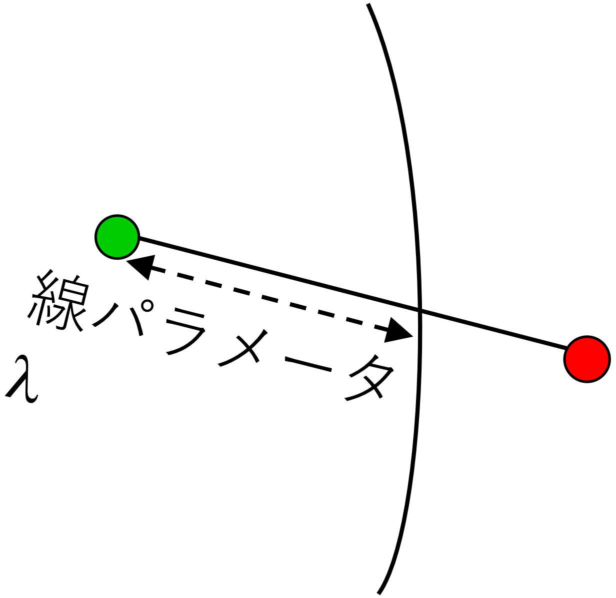
# 出口計算

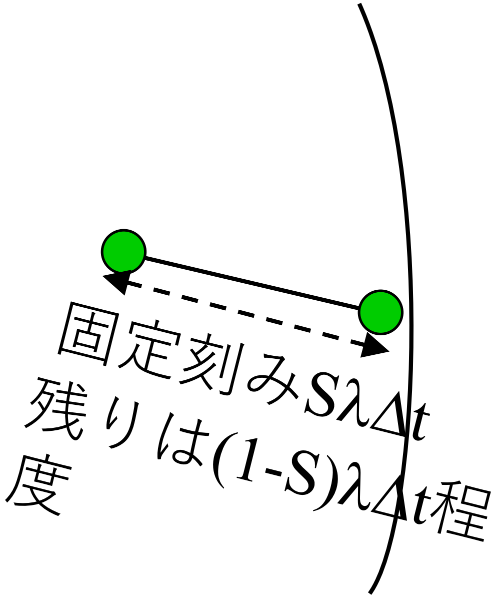
交差が見つかる

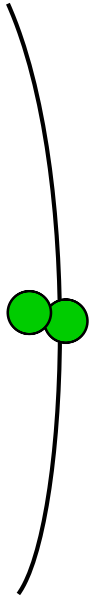
λを掛けた固定刻み幅で出口に出来るだけ近づくSを求める

S=0.9を初期値で固定幅積分
交差したらS = S - 0.1でやりなおす

新しい刻み幅
$\Delta t_{i+1} = (1 - S)\lambda\Delta t_i$
で交差するまで

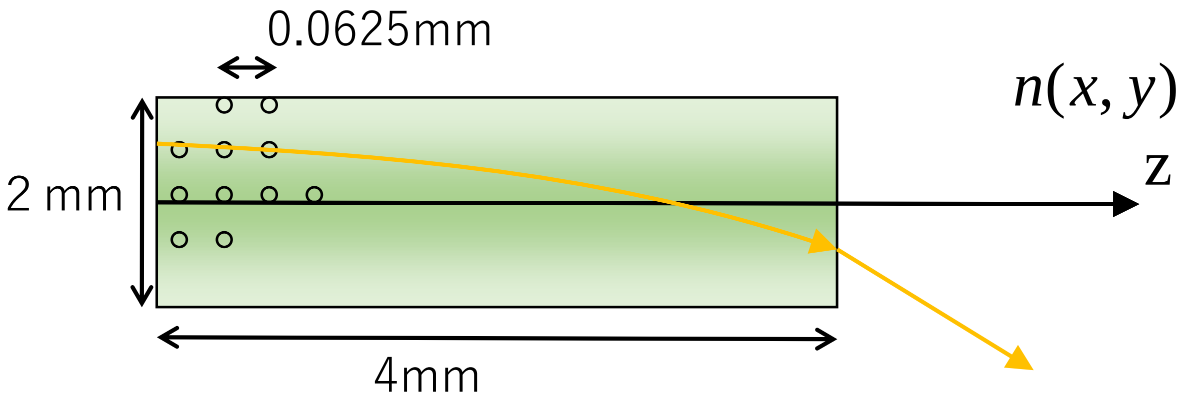


$\Delta t_{i+1}$ x |**T**| が十分小さければ終了
そうでなければ見つかった
λを使ってSを求めるプロセスに戻る

# 出口精度のベンチマーク問題




$$n(x, y) = \sqrt{n_0^2 - b^2(x^2 + y^2)}$$

GRIN内

$z$ :光線進行方向座標

$y_0$ :光線初期$y$位置

$n_0 = n(0, y_0)$

$$\bar{z} = z\frac{b}{n_0}$$

$$y = y_0 \cos \bar{z}$$

$$t_y = -by_0 \sin \bar{z}$$

$$t_z = n_0$$

GRIN外

$y_c, z_c$ :出口での光線座標

$n_{in} = n(0, y_c)$

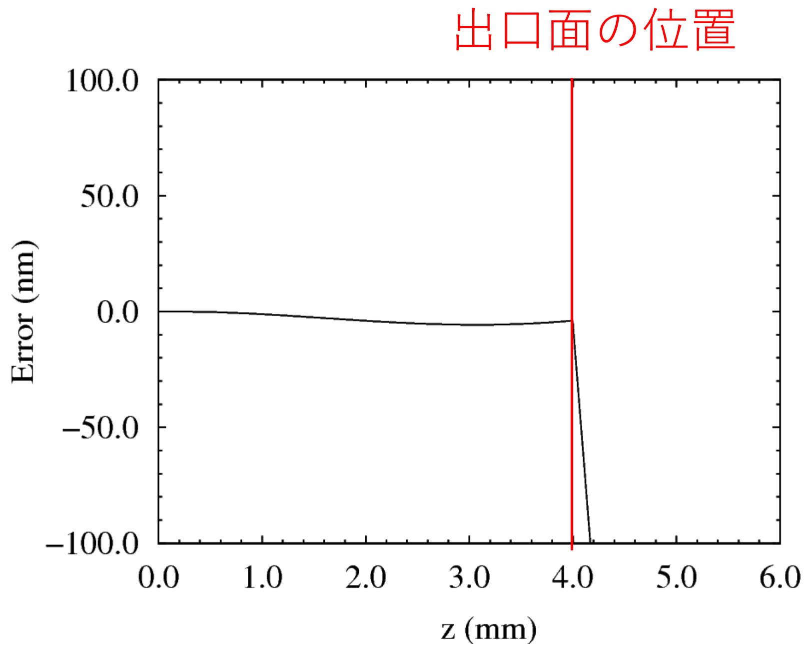
$n_{out} = 1.0$

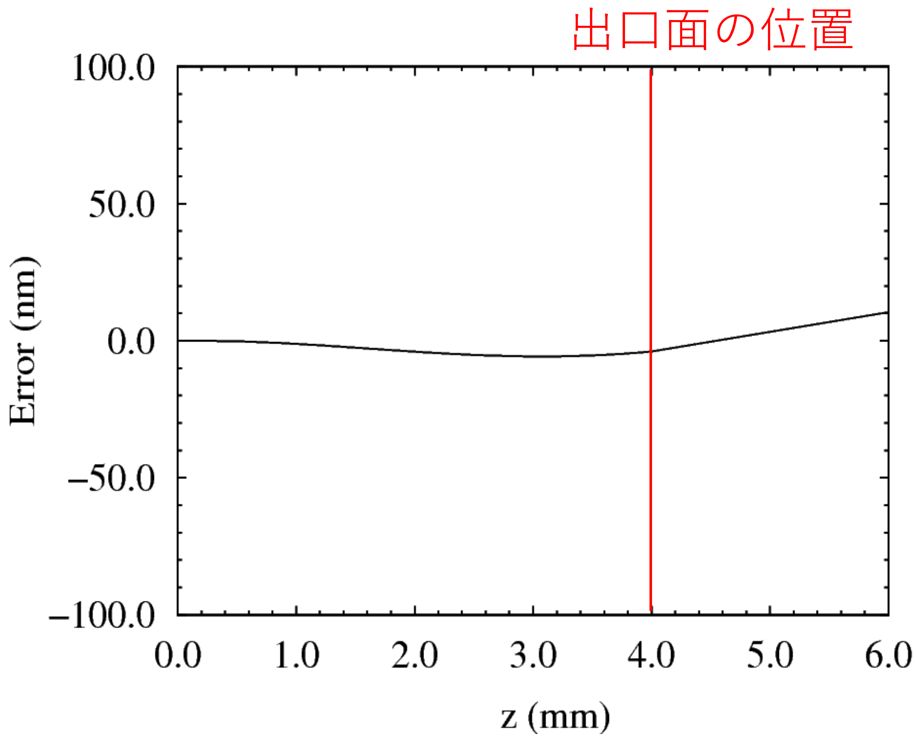
$$\bar{z}_c = z_c\frac{b}{n_0}$$

$$q = \frac{n_{in}}{n_{out}} by_0 \sin \bar{z}_c$$

$$y = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}(z - z_c) + y_c$$

# 出口計算付きの場合




何もしないとき

z = 4.0 で Err = 5e-6
z = 5.0 Err = 6e-4
z = 6.0 Err = 1e-3
z = 7.0 Err = 1.6e-3

出口ケア付き

z = 4.0 で Err = -4e-6
z = 5.0 Err = 3e-6
z = 6.0 Err = 1e-5
z = 7.0 Err = 1.7e-5

# 出口計算の負荷

```
do   {  // 進展分が小さくなるまで繰り返す全体ループ

        do   { // 出来るだけ近づくため(ループ1)
        }   while (   交差   );

        do   { // 新しい交差位置を求める(ループ2)
        }   while (   !交差   );

}   while (Δt |T| ＞ 1e-10);
```

全体ループ 2回

1回目
ループ1 : 1回
ループ2 : 2回

2回目
ループ1 : 1回
ループ2 : 1回

隣接点は求め直さないので、
MLSの係数も求め直さない

交差判定が一番計算コストが高い

# デモ

# まとめ

- 形状誤差や屈折率分布を考慮した光線追跡法

- 入力として、測定点群や、成型シミュレーション結果の点群を想定

- 表面形状再構成
  - 曲面パッチ(Nagataパッチ)を使った方法
  - 現実的な計算量で回折限界程度の精度が得られる

- 屈折率分布を扱う
  - 点群から区分的な連続関数に再構成
  - 数値積分の刻み幅自動制御
  - 出口付近で精度を落とさない方法